

Métodos doblemente robustos en el contexto de estimación de máxima verosimilitud con validación cruzada y aprendizaje automático: una explicación matemática de TMLE

Una serie en tres partes sobre funciones de influencia, ortogonalidad y el paso de fluctuación en TMLE.

AUTHOR

Miguel Angel Luque Fernandez [✉](#)

AFFILIATION

Departamento de Estadística e Investigación Operativa,
Universidad de Granada

PUBLISHED

March 2026

ABSTRACT

Este documento recopila tres entradas del blog *ouR data generation* (Keith Goldfeld, NYU) en una referencia académica unificada sobre los fundamentos matemáticos de la Estimación por Máxima Verosimilitud Dirigida (TMLE, por sus siglas en inglés). La **Parte I** introduce cuatro pilares conceptuales: los parámetros como funcionales de distribuciones de probabilidad, el muestreo como perturbación de la distribución generadora de datos, la linealización del error de estimación mediante funciones de influencia y la ortogonalidad respecto al error de estimación de parámetros de perturbación. La **Parte II** examina la propiedad de ortogonalidad mediante simulación, demostrando que el término de interacción impulsado por los parámetros de perturbación efectivamente se reduce a cero conforme aumenta el tamaño muestral, incluso bajo una mala especificación deliberada del modelo de resultados, mientras permanece centrado en cero a lo largo de todo el proceso. La **Parte III** deriva el paso de dirección (fluctuación) de TMLE para el efecto promedio del tratamiento, mostrando cómo una actualización unidimensional de la regresión de resultados inicial hace cumplir la ecuación empírica de la función de influencia eficiente (EIF), restaura la condición de centrado alterada por el error de estimación de los parámetros de perturbación y da lugar a la doble robustez. En conjunto, las tres partes ofrecen una explicación accesible pero matemáticamente fundamentada de por qué funciona TMLE, no meramente de cómo ejecutarlo.

KEYWORDS

estimación por máxima verosimilitud dirigida, inferencia causal, funciones de influencia, teoría semiparamétrica, efecto promedio del tratamiento, estimación doblemente robusta, validación cruzada

1 Parte I. Funciones de Influencia y Perturbaciones

1.1 ¿Qué problema intenta resolver TMLE?

La Estimación por Máxima Verosimilitud Dirigida (TMLE), a veces denominada *estimación por mínima pérdida dirigida*, aborda una tensión que recorre la inferencia causal moderna y la estadística semiparamétrica. Por un lado, los parámetros de interés científico dependen con frecuencia de características complejas del proceso generador de datos: los efectos causales, por ejemplo, requieren modelar conjuntamente tanto los resultados como los mecanismos de asignación al tratamiento. Por otro lado, los componentes necesarios para identificar

esos parámetros se estiman cada vez más con métodos flexibles de aprendizaje automático que necesitan muestras grandes para estabilizarse y cuyas propiedades estadísticas resisten el tratamiento analítico clásico.

La inferencia estadística clásica descansa en modelos estructurados en los que el sesgo, la varianza y la incertidumbre se derivan directamente de los supuestos del modelo. Los estimadores flexibles de aprendizaje automático violan muchos de esos supuestos: son muy adaptativos, implican numerosas decisiones de ajuste y, en general, no corresponden a funciones de verosimilitud paramétricas suaves. Aunque tales métodos pueden ofrecer un excelente rendimiento predictivo, sus propiedades inferenciales son difíciles de caracterizar analíticamente.

TMLE resuelve esta tensión desacoplando el objetivo científico de su tratamiento estadístico. En lugar de construir estimadores directamente a partir de modelos de resultados o de tratamiento—que, aunque científicamente importantes, se tratan como componentes de *perturbación*—TMLE construye estimadores cuyo comportamiento asintótico está gobernado por una *función de influencia* conocida. Una vez que un estimador posee la función de influencia correcta, su sesgo, varianza e incertidumbre a gran muestra pueden caracterizarse mediante teoría asintótica general, incluso cuando los componentes de perturbación se estiman con métodos flexibles de convergencia más lenta.

El resto de la Parte I desarrolla cuatro ideas que, en conjunto, permiten comprender TMLE:

1. ver los parámetros como **funcionales** de distribuciones de probabilidad;
2. interpretar el muestreo como una **perturbación** de la distribución verdadera;
3. **linealizar** el error de estimación mediante la función de influencia; y
4. garantizar la **ortogonalidad** respecto al error de estimación de los parámetros de perturbación en la estimación de los modelos para el tratamiento y el resultado desde la perspectiva de la teoría de la estimación semiparamétrica.

1.2 Estimadores como funcionales

Un estimador, como la media muestral o un efecto causal, no es simplemente una fórmula aplicada a los datos. Más precisamente, es un **funcional**: una aplicación que toma una distribución de probabilidad P de una familia \mathcal{P} y devuelve un número real $T(P)$:

$$T : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Escribir el parámetro de esta manera pone de manifiesto que es una propiedad de la *distribución generadora de datos*, no de ningún conjunto de datos en particular. Los datos entran únicamente a través de la distribución empírica P_n .

1.2.1 La media muestral como ejemplo canónico

La media muestral ofrece la ilustración más sencilla:

$$T(P) = \int z \, dP(z).$$

Sea P_0 la distribución generadora de datos verdadera, de modo que el parámetro objetivo es $T(P_0)$. La distribución empírica es

$$P_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{Z_i},$$

donde δ_z es la *masa puntual* en z —una distribución que concentra toda la probabilidad en el valor único z . Escribir P_n como un promedio de masas puntuales formaliza el hecho de que los datos observados asignan igual peso a cada punto muestreado; P_n es por tanto una aproximación discreta a P_0 que coloca masa $1/n$ en cada observación. El estimador de sustitución es simplemente $T(P_n)$.

1.2.2 El error de estimación como diferencia funcional

Desde la perspectiva funcional, el error de estimación es la diferencia entre evaluar el mismo funcional en dos distribuciones cercanas:

$$\hat{\theta} - \theta_0 = T(P_n) - T(P_0).$$

Comprender este error se reduce a entender cómo cambia $T(P)$ cuando P pasa de P_0 a su aproximación empírica P_n . Ésta es la pregunta central que motiva las herramientas desarrolladas a continuación.

1.3 El muestreo como perturbación

1.3.1 La medida con signo $P_n - P_0$

Cada observación contribuye con una masa puntual de tamaño $1/n$ a P_n . La diferencia $P_n - P_0$ no es en sí misma una distribución de probabilidad; es una *medida con signo* que registra dónde la distribución empírica sobre- o infrarepresenta la verdad. Puede concebirse como un balance: las regiones donde P_n coloca más masa que P_0 aparecen como entradas positivas, las regiones donde coloca menos masa como entradas negativas, y el total siempre suma cero.

El objeto $P_n - P_0$ solo cobra significado a través de su *acción sobre funciones*. Para cualquier función medible f ,

$$(P_n - P_0)f \equiv \int f(z) dP_n(z) - \int f(z) dP_0(z),$$

lo que mide cuánto se desvía el promedio empírico de $f(Z)$ de su media poblacional. Esta notación, aunque compacta, reaparecerá a lo largo del texto; toda cantidad clave de la teoría se expresa como la medida con signo actuando sobre alguna función.

1.3.2 El modelo de contaminación de Hampel

Para caracterizar la sensibilidad de $T(P)$ a cambios pequeños en P , se necesita una noción precisa de cambio *infinitesimal* en una distribución, que preserve la masa total de probabilidad y permita la diferenciación. El modelo de contaminación introducido por Hampel (1974) proporciona exactamente esto.

Dada la distribución verdadera P_0 y la masa puntual δ_z , se define la familia uniparamétrica de *distribuciones perturbadas*

$$P_\epsilon = (1 - \epsilon)P_0 + \epsilon\delta_z, \quad 0 < \epsilon < 1.$$

Esto no equivale a añadir un nuevo punto de datos completo; en cambio, introduce una cantidad infinitesimal de masa de probabilidad en z , trazando un camino suave en el espacio de distribuciones a lo largo del cual se pueden calcular derivadas (pathwise first derivative: derivada direccional).

1.4 Linealización mediante la función de influencia

1.4.1 Definición

La **función de influencia** de T en P_0 , denotada ϕ_{P_0} , se define como la derivada direccional de T a lo largo de la perturbación de Hampel:

$$\phi_{P_0}(z) \equiv \frac{d}{d\epsilon} T(P_\epsilon) \Big|_{\epsilon=0} = \frac{d}{d\epsilon} T((1 - \epsilon)P_0 + \epsilon\delta_z) \Big|_{\epsilon=0}.$$

En palabras, *la función de influencia mide el efecto de primer orden sobre $T(P)$ de perturbar infinitesimalmente la distribución en el punto z* . Es el análogo funcional de una derivada ordinaria.

1.4.2 Expansión de Taylor funcional

Si T es suficientemente regular, el error de estimación admite una expansión de primer orden:

$$T(P_n) - T(P_0) = (P_n - P_0)\phi_{P_0} + R_n,$$

donde el término dominante es lineal en la perturbación $P_n - P_0$ y R_n recoge los términos de resto de orden superior. Aplicando la definición de la medida con signo:

$$(P_n - P_0)\phi_{P_0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{P_0}(Z_i) - E_{P_0}[\phi_{P_0}(Z)],$$

= 0

ya que las funciones de influencia se construyen para satisfacer la **condición de centrado**

$$E_{P_0}[\phi_{P_0}(Z)] = 0.$$

La expansión debe leerse como una serie de Taylor funcional: ϕ_{P_0} desempeña el papel de la derivada, y $(P_n - P_0)\phi_{P_0}$ es la aproximación lineal al cambio en T inducido al reemplazar P_0 por P_n .

1.4.3 Normalidad asintótica

Si el resto satisface $R_n = o_p(n^{-1/2})$, multiplicando ambos lados por \sqrt{n} se obtiene

$$\sqrt{n}(T(P_n) - T(P_0)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \phi_{P_0}(Z_i) + o_p(1).$$

La escala \sqrt{n} refleja el hecho conocido de que promediar n observaciones independientes reduce la desviación típica a una tasa $n^{-1/2}$, de modo que multiplicar por \sqrt{n} mantiene visible la fluctuación aleatoria en el límite. Como ϕ_{P_0} tiene media cero, el Teorema Central del Límite implica convergencia en distribución a una variable aleatoria normal centrada, lo que proporciona el marco estándar de inferencia asintótica (intervalos de confianza tipo Wald). TMLE está diseñado explícitamente para que su error de estimación admita esta expansión lineal escalada en \sqrt{n} incluso cuando los componentes de perturbación se estiman de forma flexible.

1.5 Ortogonalidad bajo estimación de los parámetros de perturbación

1.5.1 El problema

En la práctica, ϕ_{P_0} nunca se conoce. Para parámetros causales, la función de influencia depende de funciones de perturbación —modelos condicionales de resultados y mecanismos de asignación al tratamiento— que deben estimarse a partir de los datos. Al reemplazar la función de influencia verdadera por una estimada $\phi_{\hat{P}}$, el término dominante se desglosa como

$$(P_n - P_0)\phi_{\hat{P}} = (P_n - P_0)\phi_{P_0} + (P_n - P_0)(\phi_{\hat{P}} - \phi_{P_0}).$$

orden $n^{-1/2}$

El segundo término es la interacción impulsada por los parámetros de perturbación. Si entra en primer orden, incluso una mala especificación moderada de los modelos de perturbación puede introducir sesgo persistente.

1.5.2 Análisis de la tasa de convergencia

Supongamos que los estimadores de los parámetros de perturbación convergen a una tasa r_n , es decir,

$$\|\phi_{\hat{P}} - \phi_{P_0}\| = O_p(r_n).$$

Entonces el término adicional se comporta como

$$(P_n - P_0)(\phi_{\hat{P}} - \phi_{P_0}) = O_p(n^{-1/2}r_n).$$

Sin una construcción especial, esto tiene el mismo orden que el término dominante, lo que significa que los errores de los parámetros de perturbación contaminan el comportamiento asintótico primario del estimador.

1.5.3 La ortogonalidad como remedio

La ortogonalidad de la función de influencia significa que tiene *pendiente cero* respecto a perturbaciones infinitesimales de las funciones de perturbación: cambios pequeños en esos modelos auxiliares no desplazan el parámetro objetivo en primer orden. Bajo esta condición, la contribución de los parámetros de perturbación se convierte en

$$O_p(n^{-1/2}r_n^2).$$

Si $r_n \rightarrow 0$ más rápido que $n^{-1/4}$, entonces $n^{-1/2}r_n^2 = o(n^{-1/2})$ y el error de estimación de los parámetros de perturbación es asintóticamente despreciable.

Conclusión clave

La ortogonalidad relaja sustancialmente el requisito sobre la estimación de los parámetros de perturbación. En lugar de exigir una precisión paramétrica de orden $n^{-1/2}$, basta con que los estimadores de perturbación converjan a cualquier tasa más rápida que $n^{-1/4}$, una condición mucho más débil que permite el uso de métodos flexibles de aprendizaje automático (Machine Learning models).

1.6 Resumen de los cuatro pilares conceptuales

Concepto	Papel en TMLE
Funcionales	Separa el objetivo científico $T(P)$ del conjunto de datos; el error de estimación es una diferencia funcional
Perturbaciones	Formaliza el muestreo como una desviación de medida con signo $P_n - P_0$; permite la diferenciación en el espacio de distribuciones
Función de influencia	Proporciona una aproximación lineal de primer orden al error de estimación; determina la distribución asintótica
Ortogonalidad	Garantiza que los errores de estimación de los parámetros de perturbación entran solo en segundo orden; permite el uso de ML flexible para los modelos de perturbación

Table 1: Resumen de los cuatro conceptos clave que subyacen a TMLE.

2 Parte II. Simulando la Interacción de perturbación (Casi) Desvaneciente

2.1 Motivación

La Parte I argumentó que el término de interacción impulsado por los parámetros de perturbación

$$(P_n - P_0)(\phi_{P_n} - \phi_{P_0})$$

debería reducirse a cero conforme crece el tamaño muestral, siempre que la función de influencia se haya construido para ser ortogonal a las perturbaciones de perturbación. El propósito de la Parte II es examinar esta afirmación empíricamente mediante datos simulados: ¿desaparece realmente el término de interacción y cómo cambia la tasa de desvanecimiento cuando los modelos de perturbación están deliberadamente mal especificados?

2.2 Recapitulación teórica

El error de estimación puede escribirse como

$$T(P_n) - T(P_0) \approx (P_n - P_0)\phi_{P_0}.$$

Como la función de influencia verdadera nunca se observa, en la práctica se utiliza la versión estimada $\phi_{\hat{P}}$.

Descomponiendo la cantidad resultante se obtiene

$$(P_n - P_0)\phi_{\hat{P}} = \underbrace{(P_n - P_0)\phi_{P_0}}_{\text{fluctuación bien comprendida}} + \underbrace{(P_n - P_0)(\phi_{\hat{P}} - \phi_{P_0})}_{\text{interacción de perturbación}}.$$

El primer término es la fluctuación estocástica “buena” que impulsa la normalidad asintótica en \sqrt{n} . El segundo término es la *interacción de perturbación*: la vía por la que los errores en los modelos auxiliares se filtran al comportamiento dominante del estimador. Cuando la función de influencia está correctamente construida, este término de filtración debería satisfacer

$$(P_n - P_0)(\phi_{\hat{P}} - \phi_{P_0}) \rightarrow 0.$$

La simulación que sigue comprueba si esto es observable en muestras finitas, incluso bajo mala especificación del modelo de resultados.

2.3 La función de influencia eficiente para el ATE

2.3.1 Parámetro objetivo

Sea el objetivo el **efecto promedio del tratamiento (ATE)**:

$$\psi_0 = E_{P_0}[Y(1) - Y(0)].$$

Bajo las condiciones de identificación estándar —consistencia, intercambiabilidad y positividad— el ATE puede escribirse como un funcional de la distribución de datos observados P_0 .

2.3.2 Funciones de perturbación auxiliares (modelo para la variable de resultado y para la variable de tratamiento)

Se definen la regresión de resultados y la puntuación de propensión (propensity score) como

$$Q_a(X) = E[Y | A = a, X], \quad g(X) = P(A = 1 | X).$$

2.3.3 Función de influencia eficiente

La función de influencia eficiente (EIF) para el ATE es

$$\phi_{P_0}(Z) = (Q_1(X) - Q_0(X) - \psi_0) + \frac{A}{g(X)}(Y - Q_1(X)) - \frac{1 - A}{1 - g(X)}(Y - Q_0(X)), \quad (\text{EIF})$$

donde las funciones de perturbación aparecen en dos roles distintos: directamente a través del término de sustitución $Q_1(X) - Q_0(X)$, e indirectamente a través de los residuos ponderados por probabilidad inversa $Y - Q_a(X)$. Esta estructura en capas hace que los errores en los modelos de perturbación entren por ambos canales, pero sus efectos de primer orden se cancelen —el sello distintivo de la ortogonalidad.

2.4 Una nota sobre la validación cruzada

Las simulaciones utilizan **validación cruzada** para estimar los parámetros de perturbación. Aunque no es estrictamente necesaria para TMLE, la validación cruzada es práctica estándar, especialmente con modelos flexibles. Sin ella, la fluctuación empírica ($P_n - P_0$) y el error de perturbación $\phi_{P_n} - \phi_{P_0}$ son funciones de los *mismos* datos y comparten, por tanto, la misma aleatoriedad, creando un bucle de retroalimentación que puede distorsionar la condición de centrado de la EIF. La validación cruzada separa los roles de entrenamiento y evaluación, permitiendo que su interacción refleje mejor la cantidad teórica de interés.

2.5 Diseño de la simulación

2.5.1 Proceso generador de datos

► Mostrar código

El proceso generador de datos (PGD) crea una covariable binaria X_1 , una covariable continua X_2 , un tratamiento binario A impulsado por ambas covariables, y un resultado continuo Y que depende del tratamiento, las covariables y su interacción. El parámetro τ es el ATE verdadero.

► Mostrar código

2.5.2 Ajuste de los modelos de perturbación

Se examinan cuatro escenarios variando si cada modelo de perturbación está correctamente especificado o deliberadamente mal especificado.

► Mostrar código

2.5.3 Predicciones y funciones de perturbación verdaderas

► Mostrar código

2.5.4 Construcción de la EIF

Se construyen dos versiones de la EIF: (i) estimada, usando los parámetros de perturbación ajustados; (ii) oracle, usando el PGD conocido. La EIF estimada requiere un estimador de centrado compatible $\hat{\psi}$, calculado por validación cruzada a partir de los mismos ajustes de perturbación para garantizar media aproximada cero.

► Mostrar código

2.5.5 Estimación del término de interacción de perturbación

Para cada conjunto de datos se realizan los siguientes pasos: (1) división en dos particiones; (2) ajuste de los modelos de perturbación en cada partición de entrenamiento; (3) cálculo de la EIF con validación cruzada; (4) comparación de la EIF estimada con la EIF oracle tanto en la muestra como en una extracción poblacional independiente, aproximando $(P_n - P_0)(\phi_{P_n} - \phi_{P_0})$.

► Mostrar código

2.5.6 Ejecución de la simulación

El bucle externo sobre las 2.000 réplicas se paraleliza con `future / furrr`, distribuyendo el trabajo entre todos los núcleos disponibles. `furrr::future_map` es un reemplazo directo de `purrr::map` que respeta un backend paralelo de `future`, y `furrr_options(seed = TRUE)` propaga semillas por trabajador para garantizar la reproducibilidad.

► Mostrar código

2.6 Resultados

La [Figure 1](#) muestra las estimaciones individuales del término de interacción de perturbación $(P_n - P_0)(\phi_{P_n} - \phi_{P_0})$ a lo largo de los tamaños muestrales y los escenarios de mala especificación.

► Mostrar código

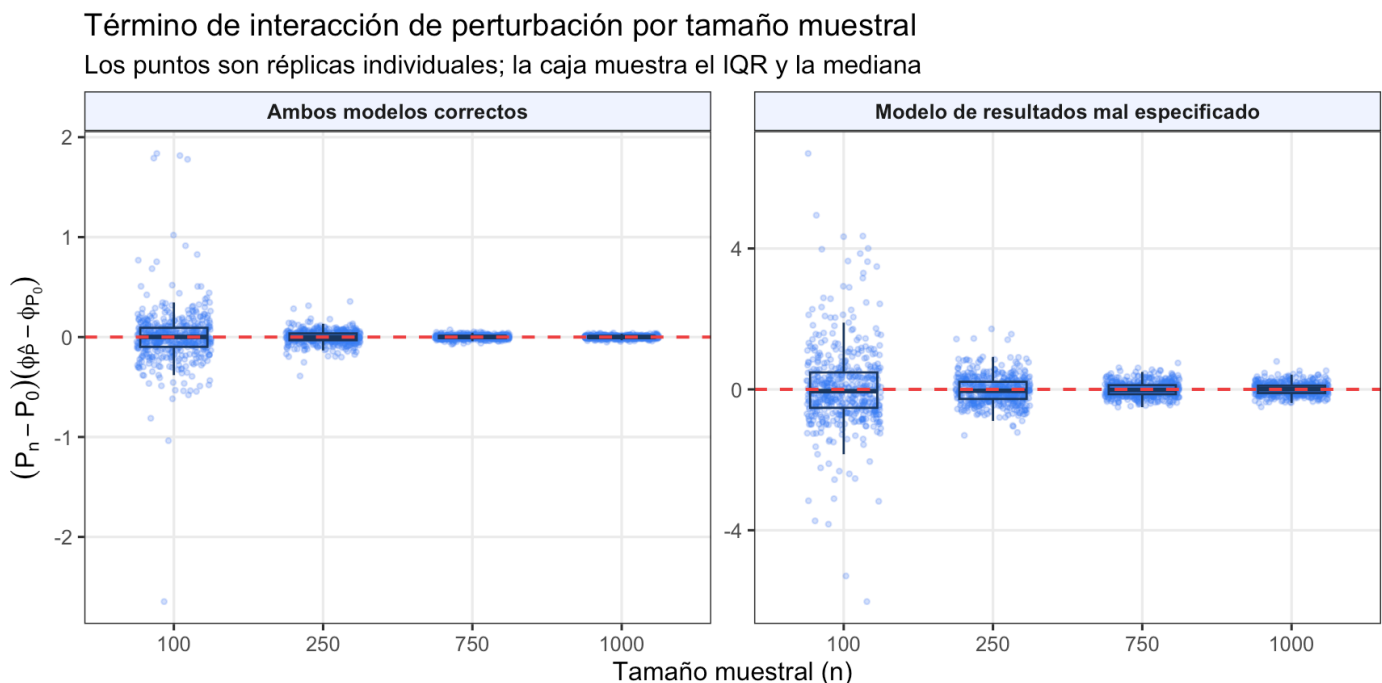


Figure 1: Término de interacción de perturbación estimado por tamaño muestral y escenario de especificación del modelo ($B = 500$ réplicas por celda). Cada punto representa un conjunto de datos simulado. La línea discontinua roja marca el cero. Panel izquierdo: ambos modelos de perturbación correctamente especificados. Panel derecho: modelo de resultados deliberadamente mal especificado.

Modelos correctamente especificados. Las estimaciones están ajustadamente centradas alrededor de cero incluso con $n = 100$; la variabilidad disminuye rápidamente y es esencialmente despreciable a partir de $n = 750$.

La desviación típica cae de 0,28 con $n = 100$ a 0,006 con $n = 1000$.

Modelo de resultados mal especificado. La variabilidad es marcadamente mayor en todos los tamaños muestrales (desviación típica 1,34 con $n = 100$), reflejando un error de estimación de perturbación persistente. Sin embargo, las estimaciones permanecen centradas alrededor de cero y la dispersión disminuye claramente con n , cayendo a 0,12 con $n = 1000$.

Interpretación

En todos los escenarios, las medias muestrales del término de interacción permanecen próximas a cero, confirmando que el error de estimación de los parámetros de perturbación afecta a la *variabilidad* en lugar de inducir una *deriva sistemática* o sesgo. Incluso bajo una mala especificación deliberada, la interacción se comporta como una cantidad de segundo orden: la mala especificación amplifica el ruido pero no crea sesgo.

2.7 Limitaciones y transición a la Parte III

El hecho de que la interacción se reduzca no garantiza que sea pequeña *relativa al error de muestreo* para ningún tamaño muestral dado. La tasa de convergencia depende de la precisión con que mejoran los modelos de perturbación y, sin garantías formales sobre esa tasa, la discrepancia restante puede seguir afectando a la inferencia en muestras finitas. La ortogonalidad garantiza que los errores de perturbación entran únicamente a través de su interacción con la variabilidad muestral, pero no fuerza a que la ecuación empírica de la EIF se cumpla exactamente. Ese es precisamente el papel del paso de dirección de TMLE, que es el objeto de la Parte III.

3 Parte III. Forzando al Objetivo a Comportarse: El Paso de Dirección de TMLE

3.1 Visión general

Las Partes I y II establecieron que los estimadores TMLE deben poseer una función de influencia ortogonal a las perturbaciones de perturbación, y que el término de interacción de perturbación sí se reduce a cero en la simulación. Lo que quedó sin abordar es *cómo* TMLE hace cumplir activamente la condición de centrado $P_n \phi_p \approx 0$ sobre la EIF estimada. Esta parte deriva el paso de dirección (fluctuación) que lo consigue.

La idea central es la siguiente. Si las funciones de perturbación verdaderas fueran conocidas, la media empírica de la función de influencia ya sería (aproximadamente) cero, y el estimador diferiría de la verdad solo a través de la variabilidad muestral. En la práctica, los modelos de perturbación estimados alteran este equilibrio. Incluso errores pequeños pueden desplazar la EIF empírica lejos de cero, introduciendo sesgo impulsado por el modelo que persiste junto con el ruido de muestreo. TMLE elimina este desequilibrio realizando una actualización unidimensional y dirigida de la regresión de resultados inicial, sin reajustar los modelos de perturbación desde cero.

3.2 Fundamento causal

Observamos datos $Z_i = (X_i, A_i, Y_i)$, $i = 1, \dots, n$, que comprenden covariables basales X , un indicador de tratamiento binario $A \in \{0, 1\}$, y un resultado Y . Cada unidad posee dos *resultados potenciales* $Y(1)$, $Y(0)$, que representan los resultados que se realizarían bajo tratamiento y control respectivamente. El **efecto promedio del tratamiento** es

$$\psi^0 = E[Y(1) - Y(0)].$$

Bajo las condiciones estándar de identificabilidad —consistencia ($Y = Y(A)$), intercambiabilidad ($A \perp\!\!\!\perp Y(a) \mid X$) y positividad ($g(X) > 0$ c.s.)— el ATE se identifica a partir de la distribución de datos observados como

$$\psi(P) = E_P[Q_1(X) - Q_0(X)], \quad Q_a(x) = E[Y \mid A = a, X = x],$$

con $g(x) = P(A = 1 \mid X = x)$ denotando la puntuación de propensión. El parámetro objetivo es $\psi_0 = \psi(P_0)$.

3.3 La EIF y la condición de centrado

3.3.1 EIF para el ATE

Siguiendo la construcción de perturbación y diferenciación de la Parte I, la función de influencia eficiente para $\psi(P)$ es

$$\phi_P(Z) = (Q_1(X) - Q_0(X) - \psi(P)) + \frac{A}{g(X)}(Y - Q_1(X)) - \frac{1 - A}{1 - g(X)}(Y - Q_0(X)). \quad (\text{EIF})$$

Cuando se evalúa en los parámetros de perturbación verdaderos, esta función está centrada:

$$E_{P_0}[\phi_{P_0}(Z)] = 0.$$

3.3.2 Fallo del centrado con parámetros de perturbación estimados

Denotemos las estimaciones iniciales de los parámetros de perturbación como \hat{Q}_a^0 y \hat{g} , y sea $\hat{\psi}^0 = P_n(\hat{Q}_1^0 - \hat{Q}_0^0)$. La EIF estimada en el ajuste inicial típicamente tiene media empírica no nula:

$$P_n \phi_{\hat{P}^0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \phi_{\hat{P}^0}(Z_i) \neq 0.$$

Cuando la EIF empírica no está centrada, la expansión de primer orden ideal se ve perturbada: el estimador se aleja de la verdad no solo por el ruido de muestreo, sino también por el desalineamiento introducido por los modelos de perturbación imperfectos.

3.4 Identificación de la fuente del desequilibrio

Por construcción, $P_n(\hat{Q}_1^0(X) - \hat{Q}_0^0(X) - \hat{\psi}^0) = 0$, de modo que cualquier desequilibrio en $P_n \phi_{\hat{P}^0}$ proviene íntegramente de los términos de corrección residual. Introduciendo la **covariable inteligente**

$$H_{\hat{g}}(A, X) = \frac{A}{\hat{g}(X)} - \frac{1-A}{1-\hat{g}(X)},$$

la parte dependiente del resultado de la EIF se convierte en $H_{\hat{g}}(A, X)(Y - \hat{Q}^0(A, X))$, y el desequilibrio se reduce a

$$P_n[H_{\hat{g}}(A, X)(Y - \hat{Q}^0(A, X))] \neq 0.$$

La única palanca disponible es el residuo $Y - \hat{Q}^0(A, X)$: ajustar ligeramente la regresión de resultados puede llevar este desequilibrio a cero.

3.5 El paso de fluctuación

TMLE introduce una *fluctuación* unidimensional del ajuste inicial de resultados:

$$\hat{Q}^\epsilon(A, X) = \hat{Q}^0(A, X) + \epsilon H_{\hat{g}}(A, X).$$

El escalar ϵ se estima regresando Y sobre $H_{\hat{g}}(A, X)$ con desplazamiento $\hat{Q}^0(A, X)$. La ecuación normal de mínimos cuadrados es

$$P_n[H_{\hat{g}}(A, X)(Y - \hat{Q}^\epsilon(A, X))] = 0.$$

Definiendo $\hat{Q}^*(A, X) = \hat{Q}^\epsilon(A, X)$, la estimación TMLE del ATE es

$$\hat{\psi}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{Q}^*(1, X_i) - \hat{Q}^*(0, X_i)).$$

3.6 La EIF actualizada está centrada

La EIF dirigida es

$$\phi_{\hat{P}^*}(Z) = \underbrace{(\hat{Q}_1^*(X) - \hat{Q}_0^*(X) - \hat{\psi}^*)}_{\text{término de sustitución}} + \underbrace{H_{\hat{g}}(A, X)(Y - \hat{Q}^*(A, X))}_{\text{residuo ponderado}}.$$

Por la construcción de sustitución, la media empírica del primer término es exactamente cero; por la ecuación normal, la media empírica del segundo término también es cero. Por tanto $P_n \phi_{\hat{P}^*} \approx 0$. El paso de dirección ha restaurado la condición de centrado en la muestra observada.

3.7 Por qué la interacción de perturbación se vuelve despreciable

Partiendo de la descomposición

$$(P_n - P_0)(\phi_{\hat{P}^*} - \phi_{P_0}) = P_n(\phi_{\hat{P}^*} - \phi_{P_0}) - P_0(\phi_{\hat{P}^*} - \phi_{P_0}),$$

el paso de dirección impone $P_n \phi_{P_n^*} \approx 0$, por lo que el primer término se reduce a $-P_n \phi_{P_0}$, que fluctúa al orden $n^{-1/2}$. El segundo término refleja el error de perturbación a nivel poblacional y, debido a la ortogonalidad, se comporta como el producto $e_Q \times e_g$ de los errores de estimación respectivos, reduciéndose a lo insignificante a medida que mejoran los parámetros de perturbación. El paso de dirección elimina el desequilibrio dominante; lo que queda está dominado por $(P_n - P_0)\phi_{P_0}$.

3.8 Doble robustez

TMLE hereda la **doble robustez** de la estructura de la EIF. Los errores de perturbación entran en el estimador de forma *multiplicativa*: el sesgo dominante se comporta como el producto $e_Q \times e_g$. En consecuencia, si cualquiera de los modelos de perturbación se estima de forma consistente, $e_Q \times e_g \rightarrow 0$ y el sesgo desaparece. Incluso cuando ambos modelos son imperfectos, su producto puede ser pequeño si los errores no son grandes simultáneamente.

Doble robustez en términos sencillos

TMLE no requiere modelos de perturbación perfectos. Los ajusta lo suficiente para que el parámetro objetivo obedezca la ecuación de la función de influencia que gobierna su comportamiento asintótico. El paso de dirección no intenta recuperar contrafactuales individuales; está realineando el estimador para que responda principalmente al ruido de muestreo genuino en lugar de a los artefactos de los ajustes de perturbación.

3.9 El papel de la validación cruzada

El paso de dirección puede aplicarse con o sin validación cruzada. Sin embargo, cuando Q^0 y g se estiman con métodos flexibles de aprendizaje automático, la validación cruzada ayuda a garantizar que la ecuación empírica de la EIF se comporte como predice la teoría. Sin ella, las mismas observaciones que entrenan los modelos de perturbación también evalúan la función de influencia, creando un bucle de retroalimentación que puede distorsionar la condición de centrado. La validación cruzada separa el entrenamiento de la evaluación, de modo que cada observación se evalúa con estimaciones de perturbación aprendidas a partir de otros datos, permitiendo que la asintótica habitual de la función de influencia aparezca con mayor claridad en muestras finitas.

3.10 Resumen de la serie en tres partes

La [Table 2](#) recoge las ideas principales a lo largo de las tres partes.

Componente	Qué hace	Por qué importa
Funcionales	Define el objetivo como $T(P)$	Separa el objetivo científico de los datos
Perturbaciones	Modela $P_n - P_0$ como medida con signo	Permite la diferenciación en el espacio de distribuciones

Componente	Qué hace	Por qué importa
Función de influencia	Aproximación de primer orden a $T(P_n) - T(P_0)$	Determina la distribución asintótica
Ortogonalidad	La EIF tiene pendiente cero respecto a los parámetros de perturbación	Permite estimar con ML; los errores entran en 2.º orden
Covariable inteligente H_{δ}	Codifica el residuo ponderado por propensión	Hace visible y corregible el desequilibrio
Paso de fluctuación	$Q^{\epsilon} = Q^0 + \epsilon H_{\delta}$	Actualización unidimensional que restaura el centrado de la EIF
Doble robustez	Sesgo $\propto e_Q \times e_g$	Consistente si cualquiera de los modelos de perturbación está correctamente especificado
Validación cruzada	Separa entrenamiento de evaluación	Evita retroalimentación; mejora el centrado de la EIF en muestras finitas

Table 2: Componentes principales del algoritmo TMLE y sus roles.

Referencias

Van der Laan, Mark J., and Sherri Rose. *Targeted Learning: Causal Inference for Observational and Experimental Data*, vol. 4. New York: Springer, 2011.

Hampel, Frank R. "The influence curve and its role in robust estimation." *Journal of the American Statistical Association* 69, no. 346 (1974): 383–393. <https://doi.org/10.1080/01621459.1974.10482962>

Chernozhukov, Victor, Denis Chetverikov, Mert Demirer, Esther Duflo, Christian Hansen, Whitney Newey, and James Robins. "Double/debiased machine learning for treatment and structural parameters." *The Econometrics Journal* 21, no. 1 (2018): C1–C68. <https://doi.org/10.1111/ectj.12097>

Kennedy, Edward H. "Semiparametric doubly robust targeted double machine learning: a review." *arXiv preprint arXiv:2203.06469* (2022).

Luque-Fernandez, Miguel Angel, Michael Schomaker, Bernard Rachet, and Mireille Schnitzer. "Targeted maximum likelihood estimation for a binary treatment: A tutorial." *Statistics in Medicine* 37, no. 16 (2018): 2530–2546. <https://doi.org/10.1002/sim.7628>

Schuler, Megan S., and Sherri Rose. "Targeted maximum likelihood estimation for causal inference in observational studies." *American Journal of Epidemiology* 185, no. 1 (2017): 65–73. <https://doi.org/10.1093/aje/kww165>

